يک الگوريتم تقريبي با فاکتور تقريب ثابت و زمان اجراي خطي  
براي مسأله‌ي Freeze-Tag اقليدسي

زهرا معزکريمي1، عليرضا باقري2، احسان يزدي3

1 دانشجوي کارشناسي ارشد، دانشکده مهندسي کامپيوتر و فناوري اطلاعات، دانشگاه صنعتي اميرکبير، تهران

zmoezkarimi@aut.ac.ir

2 استاديار، دانشکده مهندسي کامپيوتر و فناوري اطلاعات، دانشگاه صنعتي اميرکبير، تهران

ar\_bagheri@aut.ac.ir

3 دانشجوي کارشناسي ارشد، دانشکده مهندسي کامپيوتر و فناوري اطلاعات، دانشگاه صنعتي اميرکبير، تهران

ehsan@aut.ac.ir

چكيده

مسأله‌ي بيدارسازي مجموعه‌اي از ربات‌هاي خواب توسط يک ربات بيدار اوليه، Freeze-Tag Problem (FTP) نام دارد. در FTP هدف، بيدارسازي کليه ربات‌ها در کمترين زمان ممکن است. اين مسأله در حالت کلي NP-Hard و در حالت اقليدسي از جمله مسائل باز (Open) به شمار مي‌رود. در اين مقاله الگوريتم‌هاي تقريبي براي FTP در محيط اقليدسي مد نظر قرار مي‌گيرند. ابتدا يک الگوريتم تقريبي با فاکتور تقريب و زمان اجراي که توسط آرکين و همکارانش ارائه شده‌است، معرفي مي‌گردد و سپس يک الگوريتم با فاکتور تقريب بهتر و زمان اجراي خطي براي مسأله ارائه مي‌شود.

كلمات كليدي

Freeze-Tag Problem، رباتيک گروهي، بهينه‌سازي، الگوريتم تقريبي، زمان انتشار کمينه

# مقدمه

مسأله­ي Freeze Tag Problem يا به طور اختصار FTP يک مسأله­ي بهينه‌سازي است که در حوزه‌ي رباتيک گروهي مطرح مي‌شود. هدف، بيدارسازي مجموعه­اي از ربات­هاي خواب توسط يک ربات بيدار اوليه در کوتاهترين زمان ممکن است. بيدارسازي ربات­ها تنها با نزديک‌شدن به آنها صورت مي‌گيرد. هنگامي که يک ربات بيدار شد مي­تواند در بيدارسازي ساير ربات­ها شرکت نمايد. پايان مسأله زماني است که آخرين ربات بيدار شود [1]. زمان مورد نياز براي بيدارسازي تمامي ربات‌ها makespan ناميده مي‌شود.

ترتيب بيدارسازي ربات­ها را مي­توان توسط يک گراف جهت­دار نمايش داد. گره‌هاي گراف نمايانگر ربات­ها هستند و يال­هاي آن جهت حرکت يک ربات بيدار را به منظور بيدارسازي يک ربات خواب، نشان مي­دهند. از آنجا که هر ربات تنها يکبار بيدار مي­شود و هر ربات بيدار در هر لحظه يک ربات خواب را بيدار مي­کند، پاسخ مسأله يک درخت دودويي است [2]. زمان مورد نياز براي بيدارسازي کل ربات­ها نيز متناظر با فاصله‌ي‌ ريشه‌ي درخت تا دورترين برگ آن مي‌باشد. به بيان ديگر، اين مسأله معادل است با پيدا کردن يک درخت دودويي پوشا با ريشه‌ي معين، که فاصله‌ي ريشه‌ي آن با دورترين برگ درخت کمينه باشد.

کاربرد اصلي FTP در توزيع و انتقال داده‌ها است و در مواقعي بکار مي‌رود که فرستند و گيرنده براي تبادل اطلاعات بايد از نظر فيزيکي در مجاورت يکديگر قرار گيرند. اين مجاورت براي تبادل اطلاعات ممکن است به دليل ريسک امنيتي بالا باشد و يا به دليل هزينه‌ي پهناي باند بالا براي ارتباطات بي‌سيم [3]. البته از اين روش مي‌توان براي حمل و توزيع هر محموله‌ي قابل رونوشت‌گيري ديگري نيز استفاده کرد. FTP همچنين کاربردهايي در مسائل broadcasting، مسيريابي، زمان­بندي و طراحي شبکه دارد [2].

در حالت کلي FTP را مي‌توان به صورت يک گراف وزن‌دار در نظر گرفت که ربات‌ها گره‌هاي آن را تشکيل مي‌دهند و فاصله‌ي ربات‌ها طول کوتاهترين مسير بين گر‌ه‌هاي متناظر آنهاست. آرکين و همکارانش در [2] اثبات کرده‌اند که FTP در حالت کلي مسأله­اي NP-hard است.

يک حالت خاص اين مسأله که FTP اقليدسي ناميده مي‌شود آن است که محيطي که ربات‌ها در آن قرار دارند يک صفحه‌ي هندسي دو بعدي و فاصله ميان ربات‌ها طول اقليدسي پاره‌خط متصل کننده‌ي آنها باشد. مسأله FTP اقليدسي از جمله مسائل باز (Open) به شمار مي‌رود اما الگوريتم‌هاي تقريبي براي آن ارئه شده‌‌اند.

در ادامه‌ي اين مقاله الگوريتم‌هاي تقريبي براي FTP اقليدسي بررسي مي‌شوند. در بخش 2 يک الگوريتم تقريبي ارئه شده توسط آرکين و همکارانش توضيح داده مي‌شود. سپس در بخش 3 الگوريتم ديگري با زمان اجراي خطي و فاکتور تقريب بهتر براي مسأله پيشنهاد مي‌گردد. در نهايت با جمع‌بندي و نتيجه‌گيري در بخش 4 مقاله را به پايان مي‌بريم.

# يک الگوريتم تقريبي براي FTP اقليدسي

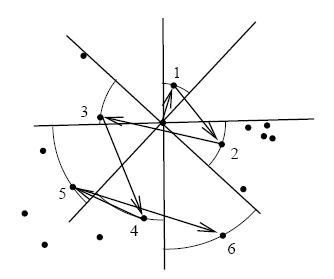
در اين بخش يک الگوريتم تقريبي با فاکتور تقريب و زمان اجراي براي FTP در صفحه‌ي اقليدسي، که توسط آرکين و همکارانش در [2] و [4] ارئه شده‌است، توضيح داده مي‌شود. اين الگوريتم يک درخت بيدارسازي که makespan آن است، ايجاد مي­کند. مجموعه نقاط (ربات­ها) و شعاع مجموعه نقاط ، يعني حداکثر فاصله‌ي ربات بيدار اوليه از ساير ربات‌ها است.

در اين بخش و بخش آتي همواره فرض مي‌کنيم ربات‌ها در يک صفحه در فضاي اقليدسي واقع‌ هستند و سرعت حرکت همه‌ي ربات‌ها ثابت و برابر با يک واحد سرعت است. در نتيجه زمان لازم براي طي کردن فاصله‌ي توسط هر ربات، واحد زمان خواهد بود.

## شرح الگوريتم

براي هر نقطه ، محيط اطراف را به سکتور تقسيم مي‌کنيم که توسط خطوطي با زواياي 0، ،  *و ... و*  تفکيک مي‌شوند. را نزديکترين نقطه در سکتور ­­j اُم (در صورت وجود) نسبت به در نظر مي­گيريم. اگر هيچ نقطه­اي از در سکتور j اُم نباشد تعريف نشده است. مي­توان تمام نقاط را براي هر و هر j در زمان با استفاده از روش­هايي مبتني بر نمودار ورونوي استاندارد، محاسبه نمود [5].

براي هر نقاط را برحسب فاصله‌شان از مرتب مي­کنيم. فرض کنيد براي اين نقاط به ترتيب، ، و ... و باشند. استراتژي بيدارسازي به اين صورت است: زماني که ربات بيدار مي­شود مسير را پيموده و نزديکترين ربات در هر سکتور غيرخالي اطراف خود را بيدار مي­کند (شکل 1). البته ممکن است اين ربات­ها پيش از رسيدن بيدار شده باشند. در اين صورت از بيدار کردن آنها صرف‌نظر مي‌کند.



شکل (1)- هنگامي که يک ربات بيدار مي‌شود نزديکترين ربات در هريک از سکتور اطراف را به ترتيب فاصله‌شان بيدار مي‌کند [2].

## کارايي الگوريتم

اکنون به بررسي کارايي الگوريتم مي­پردازيم. فرض کنيد گرافي باشد که هر نقطه را به نقاط که نزديکترين همسايه­هاي در سکتور پيرامون آن هستند، وصل مي‌کند. گراف يک θ-گراف براي و در صورتي که باشد، يک tθ-spanner براي است [6]. اين بدان معنا است که طول کوتاه­ترين مسير بين دو گره در گراف براي از برابر فاصله اقليدسي آن دو گره بيشتر نخواهد بود.

فرض کنيد ربات بيدار اوليه در نقطه و آخرين رباتي که توسط الگوريتم بيدار مي­شود، در نقطه واقع باشند. زمان طي شده براي بيدارسازي چقدر است؟ مي­دانيم که اگر يک ربات پس از طي شدن زمان بيدار شود، هر همسايه از در گراف در فاصله‌ي زماني کمتر يا مساوي دستيابي مي­شود، که طول ميسر است. اگر فاصله اقليدسي دو گره گراف را با نمايش دهيم، با يک استقراي ساده و نامساوي مثلثي داريم:

بنابراين در فاصله زماني حداکثر برابر (فاصله‌ي گرافي و ) دستيابي مي‌شود. که اين فاصله با توجه tθ-spanner بودن براي مقادير ، کمتر يا مساوي برابر فاصله اقليدسي و است. يعني:

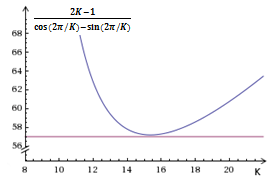
*بنابراين در فاصله زماني بيدار مي‌شود و از آنجا که يک کران پايين براي* makespan بهين*ه نيز مي‌باشد، الگوريتم فوق يک است.*

پيچيدگي زماني الگوريتم فوق براي هر ثابت است. براي جزئيات بيشتر خواننده را به [2] و [4] ارجاع مي‌دهيم.

## معايب الگوريتم

الگوريتم ذکر شده يک فاکتور تقريب ثابت را تضمين مي‌نمايد اما اين فاکتور حداکثر چه ميزان مي‌تواند باشد؟ کران بالاي اين فاکتور تابع براي است. چنانکه در شکل 2 ديده مي‌شود، اين کران بيش از 57 است. در واقع الگوريتم هيچ تقريبي کمتر از 57 را تضمين نمي‌کند.

عيب ديگر الگوريتم زمان اجراي آن است. هرچند زمان اجراي نسبتا مناسبي است اما به نظر نمي‌رسد زمان اجراي بهينه براي اين مسأله باشد.



شکل (2)- تابع

# الگوريتم پيشنهادي براي FTPي اقليدسي

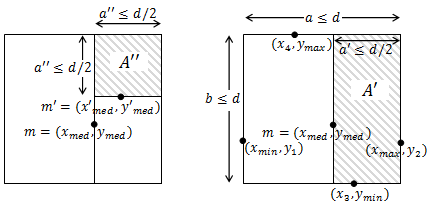
در اين بخش يک الگوريتم تقريبي با فاکتور تقريب ثابت و زمان خطي براي FTP در فضاي اقليدسي ارائه مي­شود. مزيت اين الگوريتم نسبت به الگوريتم پيشين ­سادگي، زمان اجراي بهتر و فاکتور تقريب پايين‌تر آن است. ايده‌ي اصلي الگوريتم تقسيم فضاي در بر گيرنده‌ي ربات‌ها و حل مسأله به روش تقسيم و غلبه است.

فرض کنيد يک ربات بيدار به نام و ربات خواب وجود دارند. را مجموعه‌ي نقاط متناظر با ربات‌هاي خواب، را قطر مجموعه نقاط ، يعني فاصله‌ي اقليدسي دورترين دو ربات خواب و را شعاع مجموعه نسبت به يعني حداکثر فاصله‌ي اقليدسي از نقاط در نظر بگيريد.

در اين صورت مي‌توان يک مستطيل با اضلاع موازي با محورهاي مختصات يافت که همه‌ي نقاط را در بر گيرد. اگر و به ترتيب، نقاط داراي کمترين و بيشترين مختص x و و به ترتيب، نقاط داراي کمترين و بيشترين مختص y باشند، چنين مستطيلي خواهد بود (شکل 3- الف).

حال ، ميانه‌ي نقاط در ترتيب الفبايي (lexicographical order) برحسب x و y را مي‌يابيم. يعني اگر نقاط برحسب مختص x مرتب شده باشند، ، اُمين نقطه خواهد بود. (اگر چند نقطه داراي مختص x يکسان باشند، ترتيب‌شان را برحسب مختص y آنهاست.) خط عمودي فرضي که از مي‌گذرد مستطيل را به دو بخش تقسيم مي‌کند که دست کم يکي از آنها داراي طول خواهد بود. آنرا نام مي‌گذاريم و نقاطي از را که در مستطيل واقع هستند (بجز خود ) مي‌ناميم (شکل 3- الف). به عبارت دقيق‌تر:

روشن است که داراي نقطه است و توسط يک مستطيل (يعني ) در بر گرفته مي‌شود.



شکل (3)- الف شکل (3)- ب

حال ، ميانه‌ي نقاط مجموعه برحسب مختص y را مي‌يابيم. (مجددا اگر نقاطي داراي مختص y يکسان باشند، ترتيب‌شان را برحسب مختص x آنها در نظر مي‌گيريم.) مشابه مرحله‌ي قبل، خط افقي فرضي که از مي‌گذرد مستطيل را به دو بخش تقسيم مي‌کند که دست کم يکي از آنها داراي عرض خواهد بود. آنرا و نقاطي از را که در مستطيل واقع هستند (بجز خود) مي‌ناميم (شکل 3- ب). به عبارت دقيق‌تر:

روشن است که داراي نقطه است و توسط يک مستطيل (يعني ) در بر گرفته مي‌شود.

*بعد از اين مقدمات به شرح الگوريتم مي‌پردازيم.*

## شرح الگوريتم

*ا*لگوريتم پيشنهادي که آنرا ApproxFTP مي‌ناميم، يک ربات بيدار و مجموعه نقاط ربات‌هاي خواب را به عنوان ورودي دريافت مي‌کند و نحوه‌ي بيدارسازي ربات‌ها را ارائه مي‌دهد.

اگر باشد ابتدا ربات يکي از ربات‌هاي خواب را بيدار مي‌کند. اين کار در زمان حداکثر انجام مي‌شود. حداکثر دو ربات خواب باقي خواهند ماند که مي‌توانند به صورت موازي توسط دو ربات بيدار فعلي، بيدار شوند. اين کار نيز در در زمان حداکثر انجام مي‌شود. (چون ربات‌ها در مستطيلي با طول و عرض حداکثر قرار دارند، فاصله‌ي هيچ دو رباتي بيش از نيست.) بنابراين کل بيدارسازي در زمان قابل انجام است.

براي الگوريتم به صورت بازگشتي کار مي‌کند. ابتدا مستطيل‌هاي و و مجموعه‌هاي و را مطابق آنچه گفته شد، مي‌يابد. سپس الگوريتم با ورودي‌هاي و اجرا مي‌گردد تا همه‌ي ربات‌هاي بيدار گردند. دقت کنيد که ربات‌هاي بيدار لزوما در محل اوليه خود قرار ندارند اما لزوما در محلي قرار دارند که رباتي از در ابتدا در آن واقع بوده‌است. بنابراين همه‌ي ربات‌هاي بيدار من‌جمله در واقع‌ند.

اکنون تعداد ربات‌هاي خواب باقي مانده در کمتر يا مساوي تعداد ربات‌هاي بيدار يعني اعضاي است:

پس براي بيدارسازي کليه ربات‌هاي کافي‌ست هر يک از ربات‌هاي توسط يکي از ربات‌هاي بيدار شوند. زمان لازم براي اينکار، حداکثر قطر مستطيل است که بيش از نخواهد بود.

پس از اين مرحله، همه‌ي ربات‌هاي به علاوه‌ي بيدار هستند و همگي در مستطيل واقع‌ند. مجددا تعداد ربات‌هاي بيش از تعداد ربات‌هاي بيدار نيست و همگي مي‌توانند به طور موازي طي يک مرحله بيدار شوند. زمان لازم براي اين مرحله نيز حداکثر قطر مستطيل است که از بيشتر نخواهد بود.

## فاکتور تقريب الگوريتم

در اين قسمت به محاسبه‌ي فاکتور تقريب الگوريتم مي‌پردازيم.

**لم 1:** زمان لازم براي بيدارسازي ربات خواب که در يک مستطيل موازي با محورهاي مختصات با طول و عرض حداکثر واقع‌ند، توسط يک ربات بيدار اوليه که فاصله‌اش از ربات‌هاي خواب حداکثر است، با بکارگيري الگوريتم ApproxFTP، بيش از نخواهد بود.

**اثبات:** اگر زمان لازم براي بيدارسازي ربات خواب با شرايط فوق باشد، با توجه به آنچه در شرح الگوريتم گفته شد براي خواهيم داشت:

و چنانکه گفتيم براي :

با حل اين رابطه‌ي بازگشتي خواهيم داشت:

≤ □

نکته‌ي قابل توجه‌اي که وجود دارد اين است که در اولين فراخواني الگوريتم که است، فاصله‌ي هيچ دو رباتي بيش از نيست. درحاليکه در فراخواني‌هاي بعدي فاصله دو ربات مي‌تواند به اندازه‌ي قطر مستطيل دربرگيرنده باشد. اين همان فاصله‌اي‌ست که در محاسبات ما به صورت و ظاهر شده‌است. اما براي فراخواني اول (و تنها براي فراخواني اول) مي‌توان اطمينان داشت بود فاصله ربات‌ها به جاي حداکثر و ، حداکثر همان است. لم زير از اين نکته استفاده مي‌کند.

**لم 2 :** زمان لازم براي بيدارسازي ربات خواب متناظر با مجموعه نقاط ، توسط يک ربات بيدار اوليه که فاصله‌اش از نقاط حداکثر است، با بکارگيري الگوريتم ApproxFTP، بيش از نخواهد بود.

**برهان:** در فراخواني اوليه الگوريتم فاصله‌ي ربات‌ها حداکثر است. بنابراين بعد از بيدارسازي همه‌ي رباتهاي ساير ربات‌هاي مي‌توانند در دو مرحله که هريک حداکثر به اندازه زمان مي‌برند، بيدار گردند. لذا:

براي فراخواني دوم به بعد از لم 1 استفاده مي‌کنيم:

*در نتيجه:*

□

**قضيه 3:** الگوريتم ApproxFTP يک الگوريتم تقريبي با فاکتور تقريب حداکثر 10.1 است.

**برهان:** در لم قبل اثبات کرديم که   
 . از طرف ديگر مي‌دانيم است. زيرا اگر دايره‌اي به مرکز و شعاع رسم کنيم همه‌ي نقاط را در بر مي‌گيرد و فاصله‌ي هر دو نقطه‌ي درون اين دايره کمتر يا مساوي قطر آن يعني است. بنابراين:

با توجه به اينکه يک کران پايين براي زمان بيدارسازي در حالت بهينه است، پس بنابراين الگوريتم ApproxFTP يک الگوريتم تقريبي با فاکتور تقريب حداکثر 10.1 مي‌باشد. □

## پيچيدگي زماني الگوريتم

براي محاسبه پيچيدگي زماني الگوريتم بايد توجه داشت يافتن کمينه، بيشينه و ميانه‌ي يک مجموعه با عضو در زمان امکان‌پذير است[7]. در نتيجه الگوريتم مي‌تواند مستطيل‌هاي و و مجموعه‌هاي و را در زمان بدست آورد. سپس الگوريتم براي مجموعه که تعداد اعضايش کمتر از خواهد بود، فراخواني مي‌شود. پس از آن الگوريتم در دو مرحله تناظرهايي بين اعضاي و و بين اعضاي و مي‌يابد که اين مراحل نيز در زمان انجام مي‌شوند.

بنابراين اگر زمان اجراي الگوريتم براي را با نمايش دهيم خواهيم داشت:

با حل رابطه‌ي بازگشتي فوق، بدست مي‌آيد. يعني زمان اجراي الگوريتم ApproxFTP خطي است.

# نتيجه

در اين مقاله، مسأله Freeze-Tag يا به طور اختصار FTP را مورد بررسي قرار داديم. بيان کرديم که FTP در حالت کلي NP-Hard و در حالت خاص اقليدسي باز (Open) است. سپس دو الگوريتم تقريبي براي FTP اقليدسي معرفي کرديم. اولين الگوريتم توسط آرکين و همکارانش ارائه شده‌است و الگوريتم دوم توسط نويسندگان اين مقاله پيشنهاد مي‌گردد. مزيت الگوريتم پيشنهادي نسبت به الگوريتم اول ­سادگي، زمان اجراي بهتر و فاکتور تقريب پايين‌تر آن است.

مراجع

1. <http://maven.smith.edu/~orourke/TOPP/P35.html#Problem.35>
2. Arkin, E. M., Bender, M. A., Fekete, S. P., Mitchell, J. S. B., Skutella M., *“The Freeze-Tag Problem: How to Wake Up a Swarm of Robots”*, Algorithmica, Vol. 46, No. 2, pp. 193-221, 2006.
3. Bucantanschi, D., Hoffmann, B., Hutson, K. R., Kretchmar, R. M., “*A Neighborhood Search Technique for the Freeze Tag Problem*”, Extending the Horizons: Advances in Computing, Optimization, and Decision Technologies, Springer, USA, Vol. 37, pp. 97-113, 2007.
4. Arkin, E. M., Bender, M. A., Fekete, S. P., Mitchell, J. S. B., Skutella M., *“The freeze-tag problem: How to wake up a swarm of robots”*, Proceedings of the 13th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, California, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
5. Clarkson, K. L., “*Approximation algorithms for shortest path motion planning”,* Proceedings of the 19th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 56-65, 1987.
6. Keil, J. M., Gutwin, C. A., *“Classes of graphs which approximate the complete Euclidean graph*”, Discrete Computational Geometry, Vol. 7, No. 1, pp. 13-28, 1992.
7. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C., *Introduction to algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, Second Edition, pp.183-195, 2001.